Acta Sci. Math. 44 (1982), 307—311

Beitrag zu den Arbeiten "Bemerkung zu einem Satz von S. Kaczmarz" und "Über einen Satz von Alexits und Sharma"

KÁROLY TANDORI

1. Für ein System $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ der Funktionen $\varphi_k(x)\in L(0, 1)$ sei

$$L_n^*(\varphi; x)=\int_0^1 \max_{1\leqq i\leqq n}\left|\sum_{k=1}^{i}\varphi_k(x)\varphi_k(t)\right|dt \quad (x\in(0, 1);\ n=1, 2, \ldots).$$

In der Note [1] haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz A. *Ist* $a=\{a_k\}_1^\infty\notin l^2$, *dann gibt es ein orthonormiertes System* φ *in* (0,1) *mit* $L_n^*(\varphi; x)=O(1)$ $(x\in(0, 1);\ n=1, 2, \ldots)$ *derart, daß die Reihe*

(1) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$$

in (0, 1) *überall divergiert.*

Mit der in [1] angewandten Methode kann man die folgende, schärfere Behauptung beweisen.

Satz I. *Ist* $a\notin l^2$, *dann gibt es ein orthonormiertes System* φ *in* (0, 1) *mit*

(2) $$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k(x)\varphi_k(t)|\,dt\leqq K<\infty \quad (x\in(0, 1))$$

derart, daß die Reihe (1) *in* (0, 1) *überall divergiert.*

Beweis des Satzes I. Es sei $0=n(1)<\ldots<n(l)<\ldots$ eine Indexfolge mit der Eigenschaft

(3) $$A_l^2=\sum_{k=n(l-1)+1}^{n(l)} a_k^2\geqq 4^l \quad (l=2, 3, \ldots).$$

Mit $k_1<\ldots<k_i<\ldots$ bezeichnen wir die Indizes k, für die $a_k=0$ ist. Es sei $Z(l)$ die Menge der Indizes k mit $n(l-1)<k\leqq n(l)$ und $a_k\neq 0$ $(l=2, 3, \ldots)$.

Eingegangen am 16. Oktober 1981.

Es seien weiterhin $I_k(l), J_k(l)$ $(k \in Z(l);\ l=2,3,\dots)$, J_i $(i=1,2,\dots)$ Teilintervalle von $(0,1)$ mit den Eigenschaften (für $l, l_1, l_2=2,3,\dots$)

$$I_{k_1}(l)\cap I_{k_2}(l)=\emptyset \quad (k_1,k_2\in Z(l),\ k_1\neq k_2),\qquad \bigcup_{k\in Z(l)} I_k(l)=(0,1),$$

$$\operatorname{mes} I_k(l)=a_k^2/A_l^2 \quad (k\in Z(l)),\qquad I_k(l)\cap J_k(l)=\emptyset \quad (k\in Z(l)),$$

$$J_{k_1}(l_1)\cap J_{k_2}(l_2)=\emptyset \quad (k_1\in Z(l_1),\ k_2\in Z(l_2),\ (k_1-k_2)^2+(l_1-l_2)^2\neq 0),$$

$$\operatorname{mes} J_k(l)=\operatorname{mes} I_k(l)/l^2 \quad (k\in Z(l)),\qquad J_{i_1}\cap J_{i_2}=\emptyset \quad (i_1,i_2=1,2,\dots,\ i_1\neq i_2).$$

Unter den obigen Bedingungen kann man solche Intervalle leicht angeben.

Es sei $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ ein orthonormiertes System von Treppenfunktionen in $(0,1)$ mit den Eigenschaften

$$|\varphi_k(x)|=\begin{cases} A_l/|a_k|l, & x\in I_k(l),\\ (1-1/l^2)^{1/2}/\sqrt{\operatorname{mes} J_k(l)}, & x\in J_k(l),\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\quad (k\in Z(l)),$$

$$|\varphi_{k_i}(x)|=\begin{cases} 1/\sqrt{\operatorname{mes} J_i}, & x\in J_i,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\quad (i=1,2,\dots).$$

Ein solches System kann leicht angegeben werden; man hat die Gruppe der Funktionen $\varphi_k(x)$ $(k\in Z(l))$, $\varphi_{k_{l-1}}(x)$ durch Rekursion zu definieren.

Es sei $x\in(0,1)$. Auf Grund der Definition der Intervalle $J_k(l), J_i$ und der Funktionen $\varphi_k(x)$ gibt es einen Index l_0 derart, daß

$$x\notin\Big(\bigcup_{l=l_0}^{\infty}\bigcup_{k\in Z(l)} J_k(l)\Big)\cup\Big(\bigcup_{\substack{i\\ k_i>n(l_0-1)}} J_i\Big).$$

Ist $l\geqq l_0$, dann gibt es auf Grund von (3) und der Definition von $\varphi_k(x)$ einen Index $k(x,l)\in Z(l)$ mit

$$\Big|\sum_{k=n(l-1)+1}^{n(l)} a_k\varphi_k(x)\Big|=|a_{k(x,l)}\varphi_{k(x,l)}(x)|=A_l/l\geqq 2^l/l.$$

Daraus folgt, daß die Reihe (1) im Punkt x divergiert.

Es sei $x\in(0,1)$. Auf Grund der Definition der Intervalle $I_k(l)$, $J_k(l)$, J_i und der Funktionen $\varphi_k(x)$ gibt es für jedes l einen Index $k(x,l)\in Z(l)$ mit $x\in I_{k(x,l)}(l)$; weiterhin eventuell existiert einen Index $k_0(x,l_0)\in Z(l_0)$ mit $x\in J_{k_0(x,l_0)}(l_0)$, bzw. einen Index i_0 mit $x\in J_{i_0}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k(x)\varphi_k(t)|=\sum_{l=2}^{\infty}|\varphi_{k(x,l)}(x)\varphi_{k(x,l)}(t)|+$$
$$+|\varphi_{k_0(x,l_0)}(x)\varphi_{k_0(x,l_0)}(t)|+|\varphi_{k_{i_0}}(x)\varphi_{k_{i_0}}(t)|.$$

(Wenn solcher Index $k_0(x, l_0)$, bzw. i_0 nicht existiert, dann ist der zweite, bzw. dritte Glied an der rechten Seite gleich mit Null.) Auf Grund der Definition der Funktion $\varphi_k(x)$ ergibt sich dann

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(x)\varphi_k(t)|\,dt =$$

$$= \sum_{l=2}^{\infty} \Big(|\varphi_{k(x,l)}(x)| \int_{I_{k(x,l)}(l)} |\varphi_{k(x,l)}(t)|\,dt + |\varphi_{k(x,l)}(x)| \int_{J_{k(x,l)}(l)} |\varphi_{k(x,l)}(t)|\,dt +$$

$$+ |\varphi_{k_0(x,l_0)}(x)| \int_{I_{k_0(x,l_0)}(l_0)} |\varphi_{k_0(x,l_0)}(t)|\,dt + |\varphi_{k_0(x,l_0)}(x)| \int_{J_{k_0(x,l_0)}(l_0)} |\varphi_{k_0(x,l_0)}(t)|\,dt +$$

$$+ |\varphi_{k_{i_0}}(x)| \int_{J_{i_0}} |\varphi_{k_{i_0}}(t)|\,dt =$$

$$= \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{A_l^2}{a_{k(x,l)}^2 l^2} \operatorname{mes} I_{k(x,l)}(l) + \frac{A_l}{|a_{k(x,l)}|\,l} \left(1-\frac{1}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{mes} J_{k(x,l)}(l)}} \operatorname{mes} J_{k(x,l)}(l) \right) +$$

$$+ \left(1-\frac{1}{l_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{mes} J_{k_0(x,l_0)}(l_0)}} \frac{A_{l_0}}{|a_{k_0(x,l_0)}|\,l_0} \operatorname{mes} I_{k_0(x,l_0)}(l_0) +$$

$$+ \left(1-\frac{1}{l_0^2}\right) \frac{1}{\operatorname{mes} J_{k_0(x,l_0)}(l_0)} \operatorname{mes} J_{k_0(x,l_0)}(l_0) + \frac{1}{\operatorname{mes} J_{i_0}} \operatorname{mes} J_{i_0} =$$

$$= \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{1}{l^2} + \left(1-\frac{1}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{l^2} \right) + \left(1-\frac{1}{l_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1-\frac{1}{l_0^2}\right) + 1 \leqq 3\left(1+\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{l^2}\right) = K < \infty.$$

Damit haben wir bewiesen, daß (2) für das System φ erfüllt ist.

2. Es sei $\lambda = \{\lambda_k\}_1^\infty$ eine monoton nichtabnehmende Folge von positiven Zahlen mit $\lambda_k \to \infty$ $(k \to \infty)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\lambda_1 \geqq 1$ voraussetzen. Für jede positive ganze Zahl l bezeichnet $Z(l)$ die Menge der positiven ganzen Zahlen k, mit $2^l < \lambda_k \leqq 2^{l+1}$. Es seien $l_1 < \ldots < l_i < \ldots$ diejenigen Indizes, für die $Z(l_i) \neq \varnothing$ ist; die Elemente von $Z(l)$ seien in der natürlichen Anordnung $\nu(i)+1, \ldots, \nu(i+1)$. Für eine reelle Zahlenfolge $a = \{a_k\}_1^\infty$ setzen wir

$$A_i^2 = \sum_{k=\nu(i)+1}^{\nu(i+1)} a_k^2 \lambda_k \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

In der Arbeit [2] haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz B. *Gilt*

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \infty, \tag{4}$$

dann gibt es ein System $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ *von reellen Funktionen in* $L(0,1)$ *derart, daß*

$$L_n^*(\varphi;x)\leqq 16\lambda_n\quad (x\in(0,1);\; n=1,2,\ldots) \tag{5}$$

besteht, und die Reihe (1) *in* (0, 1) *überall divergiert.*

Mit der in [2] angewandten Methode kann man die folgende schärfere Behauptung zeigen.

Satz II. *Gilt* (4), *dann gibt es ein System* $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_1^\infty$ *von reellen Funktionen in* $L(0,1)$ *derart, daß*

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^n |\varphi_k(x)\varphi_k(t)|\,dt\leqq 16\lambda_n\quad (x\in(0,1);\; n=1,2,\ldots)$$

besteht, und die Reihe (1) *in* (0, 1) *überall divergiert.*

Beweis des Satzes II. Für jede positive ganze Zahl i seien $I_s(i)$ $\big(s=\nu(i)+1,\ldots$ $\ldots,\nu(i+1)\big)$ disjunkte Intervalle mit

$$\bigcup_{s=\nu(i)+1}^{\nu(i+1)} I_s(i)=(0,1),\quad \operatorname{mes} I_s(i)=a_s^2\Big/\sum_{k=\nu(i)+1}^{\nu(i+1)} a_k^2,$$

wenn $a_s\neq 0$, und $I_s(i)=\emptyset$, wenn $a_s=0$. Für einen Index s mit $\nu(i)<s\leqq\nu(i+1)$ und $a_s\neq 0$ setzen wir

$$\varphi_s(x)=\begin{cases} A_i/a_s, & x\in I_s(i),\\ 0 & \text{sonst;}\end{cases}$$

im Falle $a_s=0$ sei $\varphi_s(x)\equiv 0$.

Sei i_0 eine positive ganze Zahl und sei $x\in(0,1)$. Dann gibt es für jede positive ganze Zahl i $(1\leqq i\leqq i_0)$ einen Index $s(x,i)$ $\big(\nu(i)<s(x,i)\leqq\nu(i+1)\big)$ mit $x\in I_{s(x,i)}(i)$. Man hat dann

$$\sum_{k=1}^{\nu(i_0+1)} a_k\varphi_k(x)=\sum_{i=1}^{i_0} a_{s(x,i)}\varphi_{s(x,i)}(x).$$

Daraus, auf Grund der Definition der Funktionen $\varphi_k(x)$ folgt

$$\sum_{k=1}^{\nu(i_0+1)} a_k\varphi_k(x)=\sum_{i=1}^{i_0} A_i\quad (x\in(0,1);\; i_0=1,2,\ldots).$$

Daraus und aus (4) ergibt sich, daß die Reihe (1) in (0, 1) überall divergiert.

Es sei i eine positive ganze Zahl, $\nu(i)<n\leqq\nu(i+1)$ und $x\in(0,1)$. Dann gibt es einen Index $s(x,i)$ $\big(\nu(i)<s(x,i)\leqq\nu(i+1)\big)$ mit $x\in I_{s(x,i)}(i)$, und so gilt

$$\int_0^1 \sum_{k=\nu(i)+1}^{n} |\varphi_k(x)\varphi_k(t)|\,dt\leqq \int_{I_{s(x,i)}(i)} |\varphi_{s(x,i)}(x)\varphi_{s(x,i)}(t)|\,dt=$$

$$=\frac{A_i^2}{a_{s(x,i)}^2}\operatorname{mes} I_{s(x,i)}(i).$$

Daraus folgt, auf Grund der Definition von A_i und $\nu(i)$

$$(6)\quad \int_0^1 \sum_{k=\nu(i)+1}^{n} |\varphi_k(x)\varphi_k(t)|\,dt \leqq 2\lambda_n \quad \bigl(x\in(0,1);\ \nu(i)<n\leqq \nu(i+1);\ i=1,2,\ldots\bigr).$$

Es sei n eine beliebige positive ganze Zahl. Dann gibt es einen Index i_0 mit $\nu(i_0)< <n\leqq\nu(i_0+1)$, und gilt

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k(x)\varphi_k(t)|\,dt \leqq \sum_{i=0}^{i_0-1}\int_0^1 \sum_{k=\nu(i)+1}^{\nu(i+1)} |\varphi_k(x)\varphi_k(t)|\,dt + \int_0^1 \sum_{k=\nu(i_0)+1}^{n} |\varphi_k(x)\varphi_k(t)|\,dt \leqq$$

$$\leqq 2(\lambda_{\nu(2)}+\ldots+\lambda_{\nu(i_0)}+\lambda_n) \leqq 4(2^2+\ldots+2^{i_0+1}) \leqq 162^{i_0} \leqq 16\lambda_{\nu(i)+1} \leqq 16\lambda_n,$$

für jedes $x\in(0,1)$, auf Grund von (6).

Damit haben wir bewiesen, daß (5) erfüllt ist.

Schriftenverzeichnis

[1] K. Tandori, Bemerkung zu einem Satz von S. Kaczmarz, *Acta Sci. Math.*, **42** (1980), 171—173.
[2] K. Tandori, Über einen Satz von Alexits und Sharma, *Acta Sci. Math.*, **42** (1980), 175—182.

BOLYAI INSTITUT
UNIVERSITÄT SZEGED
ARADI VÉRTANÚK TERE 1
6720 SZEGED, UNGARN